

MATEMATIKA ROZŠIŘUJÍCÍ

MXMVD25C0T04

DIDAKTICKÝ TEST

Maximální bodové hodnocení: 50 bodů
Hranice úspěšnosti: 33 %

1 Základní informace k zadání zkoušky

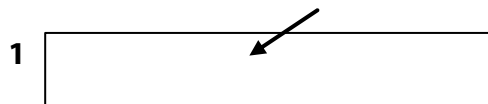
- **Didaktický test** obsahuje **22 úloh**.
- **Časový limit** pro řešení didaktického testu je **uveden na záznamovém archu**.
- **Povolené pomůcky:** psací a rýsovací potřeby, Matematické, fyzikální a chemické tabulky a kalkulátor bez grafického režimu, bez řešení rovnic a úprav algebraických výrazů. Nelze použít programovatelný kalkulátor.
- U každé úlohy je uveden maximální počet bodů.
- Odpovědi píše do záznamového archu.
- **Nejednoznačný nebo nečitelný zápis odpovědi bude považován za chybné řešení.**
- Poznámky si můžete dělat do testového sešitu, nebudou však předmětem hodnocení.
- První část didaktického testu (úlohy 1–11) tvoří **úlohy otevřené**.
- Ve druhé části didaktického testu (úlohy 12–22) jsou uzavřené úlohy, které obsahují nabídku odpovědí. U každé úlohy nebo podúlohy je **právě jedna odpověď správná**.
- Za neuvedené řešení či za nesprávné řešení úlohy jako celku **se neudělují záporné body**.

2 Pravidla správného zápisu odpovědí

- Odpovědi zaznamenávejte **modře nebo černě** písíci propisovací tužkou, která píše **dostatečně silně a nepřerušovaně**.
- Budete-li rýsovat obyčejnou tužkou, následně obtáhněte čáry propisovací tužkou.
- Hodnoceny budou **pouze odpovědi uvedené v záznamovém archu**.

2.1 Pokyny k otevřeným úlohám

- Výsledky **píšte čitelně** do vyznačených bílých polí.



- Je-li požadován celý postup řešení, uveďte jej do záznamového archu. Pokud uvedete pouze výsledek, nebudou vám přiděleny žádné body.
- **Zápisy uvedené mimo** vyznačená bílá pole **nebudou hodnoceny**.
- Chybný zápis přeškrtněte a nově zapište správné řešení.

2.2 Pokyny k uzavřeným úlohám

- Odpověď, kterou považujete za správnou, zřetelně zakřížkujte v příslušném bílém poli záznamového archu, a to přesně z rohu do rohu dle obrázku.



- Pokud budete chtít následně zvolit jinou odpověď, pečlivě zabarvete původně zakřížkované pole a zvolenou odpověď vyznačte křížkem do nového pole.



- Jakýkoliv jiný způsob záznamu odpovědi a jejich oprav bude považován za nesprávnou odpověď.

TESTOVÝ SEŠIT NEOTVÍREJTE, POČKEJTE NA POKYN!

- 1 Pro $x \in (0; +\infty)$ upravte výraz na co nejjednodušší tvar:

$$\frac{3\sqrt{x} - \sqrt{27}}{3} \cdot \frac{3 + \sqrt{3x}}{\sqrt{3}} =$$

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 2

Jan měl na svém účtu o 75 % vyšší částku, než měla na svém účtu Lída.

Z prostředků na těchto dvou účtech si oba společně koupili byt.

Jan na tento nákup použil 60 % prostředků ze svého účtu.

Po nákupu bytu zůstala oběma na jejich účtech úplně stejná částka.

(CZVV)

max. 2 body

- 2 Vypočtěte,

- 2.1 kolik procent z prostředků na svém účtu použila na nákup bytu Lída,
- 2.2 kolikrát více přispěl na nákup bytu Jan než Lída.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 3

Úředníci Matěj a Lada kontrolují maturitní písemky žáků, kteří se odvolali proti hodnocení. Matěj by všechny písemky zkontroloval sám za n šestihodinových pracovních směn. Lada je produktivnější, neboť za stejnou dobu zkontroluje 1,5krát více písemek než Matěj. Během několika pracovních směn zkontrolovala Lada část maturitních písemek. Zbývající písemky zkontroloval Matěj za dobu o 2 hodiny delší, než strávila kontrolou Lada. Matěj ani Lada své pracovní tempo nemění.

(CZVV)

max. 2 body

3 Vyjádřete výrazem s proměnnou n ,

- 3.1 jakou část maturitních písemek zkontroloval Matěj za 2 hodiny,
- 3.2 jakou část všech maturitních písemek zkontrolovala Lada.

VÝCHOZÍ TEXT A TABULKA K ÚLOZE 4

Všech **80 žáků** čtvrtého ročníku dostalo známku ze závěrečného testu.

V tabulce jsou uvedeny pouze četnosti známek 4 a 5.

Dále platí: Žádné dvě četnosti nejsou stejné, medián známek je 3 a modus známek je 2.

Známka	1	2	3	4	5
Četnost				11	4

(CZVV)

2 body

4 Určete, kolik nejvýše žáků mohlo ze závěrečného testu dostat jedničku.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 5

Pětimístné číslo splňuje obě následující podmínky:

- Obsahuje všech pět číslic 1, 2, 3, 4, 5.
- Ciferný součet jeho prvního trojčíslí je stejný jako ciferný součet posledního trojčíslí.

(Např. v čísle 41 532 má první trojčíslí 415 a poslední trojčíslí 532 stejný ciferný součet.)

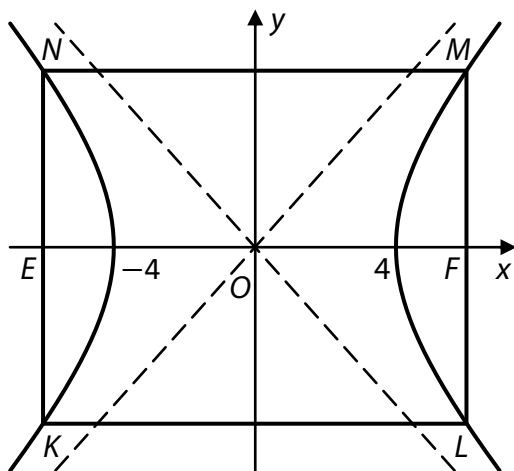
(CZVV)

2 body

5 Vypočtěte, kolik různých čísel splňuje uvedené podmínky.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 6

Na obrázku jsou v kartézské soustavě souřadnic Oxy zakresleny hyperbola a obdélník $KLMN$. Hyperbola má střed v počátku soustavy souřadnic a poloosy $a = 4$, $b = 2\sqrt{5}$. Všechny vrcholy obdélníku $KLMN$ leží **na hyperbole** a jeho svislé strany KN a LM procházejí ohnisky E, F hyperboly.



(CZVV)

max. 2 body

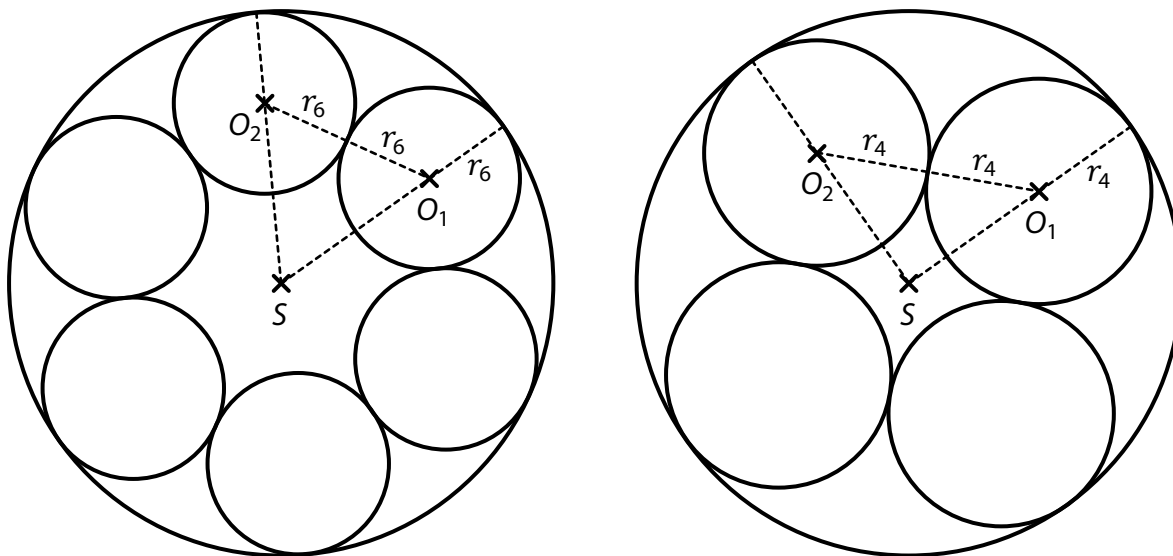
6 Vypočtete obvod obdélníku $KLMN$.

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOHÁM 7–8

Do velkého kruhu se středem S a poloměrem r je vepsáno n shodných malých kruhů ($n \in \mathbf{N}$), z nichž se každý dotýká hranice velkého kruhu a dvou sousedních malých kruhů.

Označíme středy malých kruhů O_1, O_2, \dots, O_n a poloměr malého kruhu r_n .



(CZVV)

max. 2 body

7 Vyjádřete výrazem s proměnnou r poloměr malého kruhu r_n

7.1 pro $n = 6$,

7.2 pro $n = 4$.

max. 2 body

8 Vyjádřete výrazem s proměnnými r a n poloměr malého kruhu r_n .

V záznamovém archu uveďte celý **postup řešení**.

max. 3 body

- 9** Je dána rovnice, jejíž levou stranu tvoří nekonečná geometrická řada.

$$\frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{16}{(x+1)^3} - \frac{64}{(x+1)^4} + \dots = \frac{x-1}{16}$$

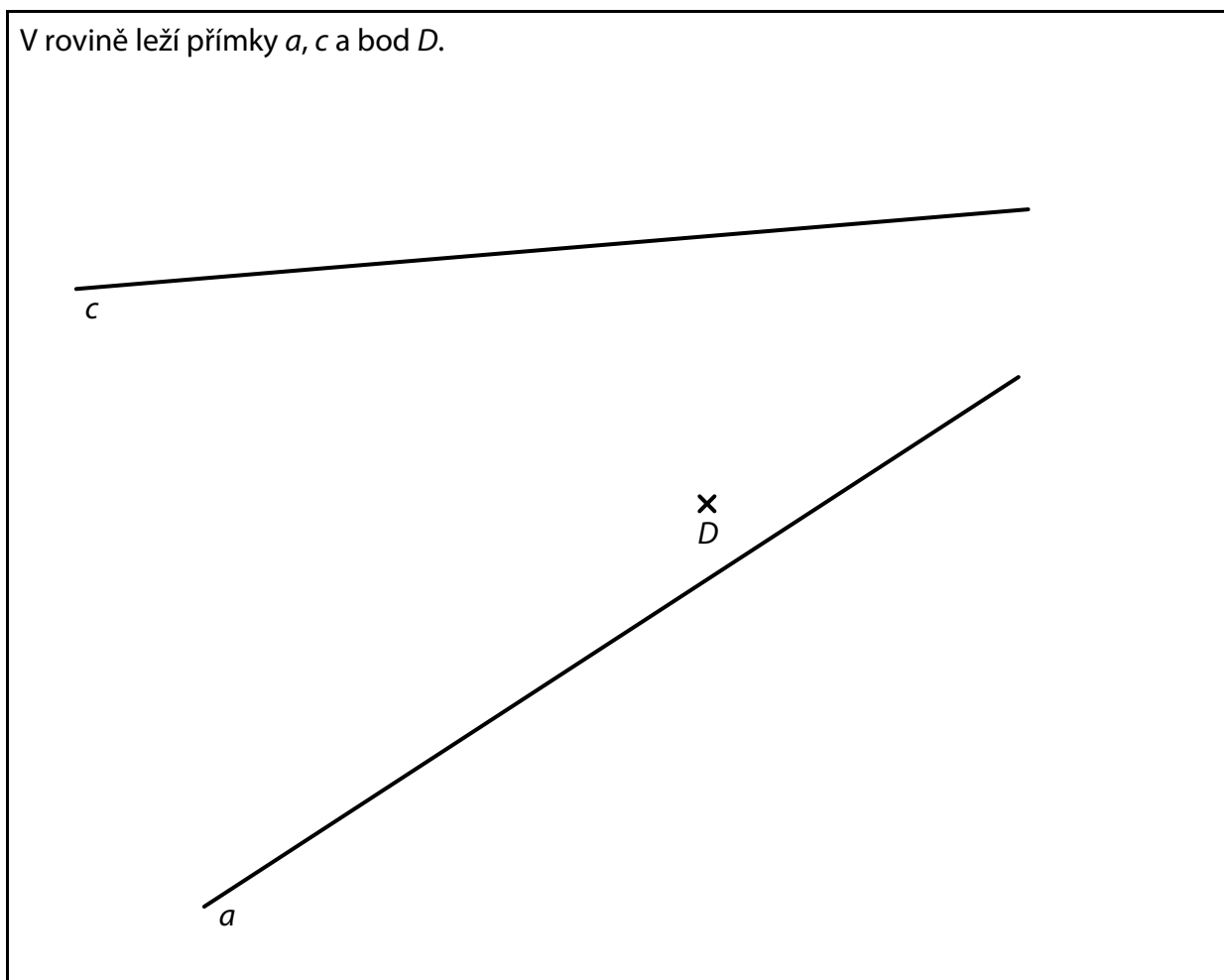
- 9.1 Určete množinu všech $x \in \mathbf{R}$, pro která je řada na levé straně rovnice konvergentní.

- 9.2 Řešte rovnici v oboru \mathbf{R} .

V záznamovém archu uveďte v obou částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 10

V rovině leží přímky a , c a bod D .



(CZVV)

max. 3 body

10 Bod D je vrchol čtverce $ABCD$.

Na přímce a leží vrchol A tohoto čtverce a na přímce c vrchol C .

10.1 Hledáme vrcholy A , B , C čtverce $ABCD$.

Provedte náčrtek čtverce $ABCD$ a запиšte rozbor nebo postup konstrukce.

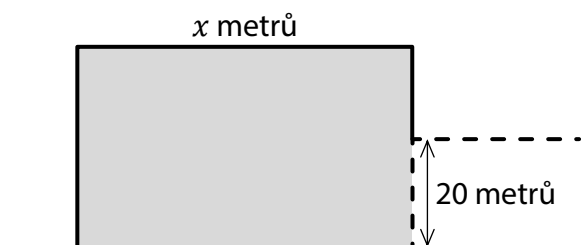
10.2 V obrázku sestrojte chybějící vrcholy čtverce $ABCD$ a čtverec narýsujte.
Najděte všechna řešení.

V záznamovém archu obtáhněte vše **propisovací tužkou**.

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 11

Výběh pro ovce bude mít tvar pravoúhelníku, jehož strana měří x metrů.

Celý výběh má být oplocen. K ohrazení části výběhu využijeme v délce $(x + 20)$ metrů úsek z již existujícího plotu (v obrázku je tento plot vyznačen čárkovanou čarou). Zbytek hranice výběhu bude tvořit nový plot v celkové délce 320 metrů.



(CZVV)

max. 4 body

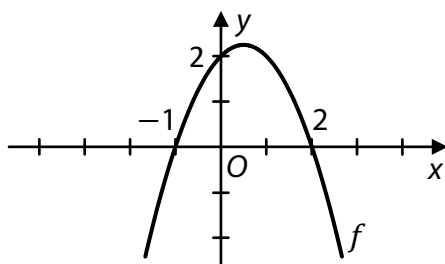
11

- 11.1 Pro $x \in (0; 300)$ vyjádřete v m^2 rozlohu výběhu S v závislosti na veličině x .
- 11.2 Určete všechny hodnoty x , pro které bude mít výběh rozlohu **alespoň** $12\,000 \text{ m}^2$.
- 11.3 Vypočtěte v m^2 **největší** možnou rozlohu výběhu.

V záznamovém archu uveďte ve všech částech úlohy celý **postup řešení**.

VÝCHOZÍ TEXT A GRAF K ÚLOZE 12

Kvadratická funkce $y = f(x)$ s definičním oborem \mathbf{R} je dána následujícím grafem zakresleným v kartézské soustavě souřadnic Oxy .



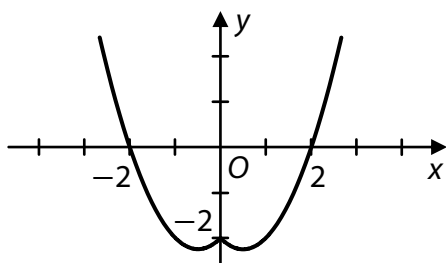
(CZVV)

max. 3 body

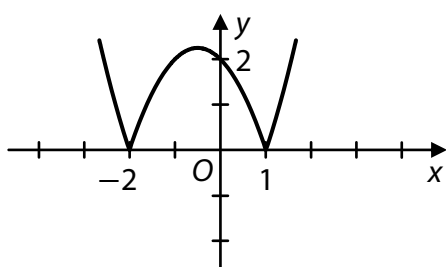
12 Všechny funkce dané následujícími grafy (12.1–12.3) mají definiční obor \mathbf{R} .

Přiřadte ke každému grafu (12.1–12.3) odpovídající předpis funkce (A–F).

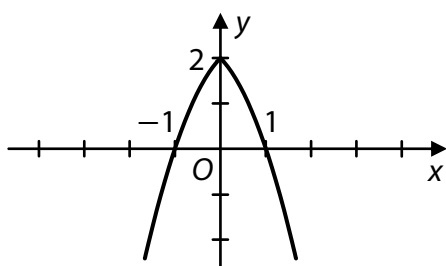
12.1



12.2



12.3



- A) $y = -f(|x|)$
- B) $y = f(-|x|)$
- C) $y = f(|-x|)$
- D) $y = -|f(x)|$
- E) $y = |-f(x)|$
- F) $y = |f(-x)|$

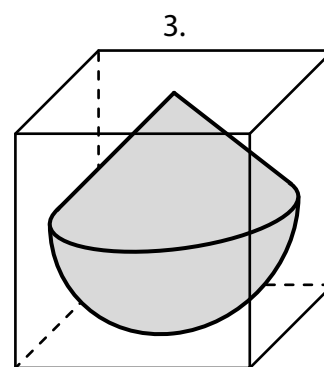
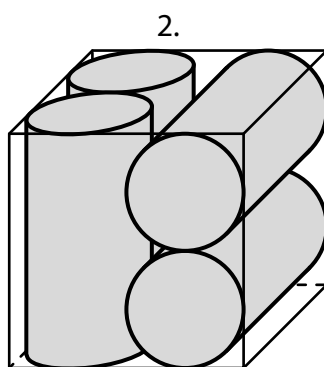
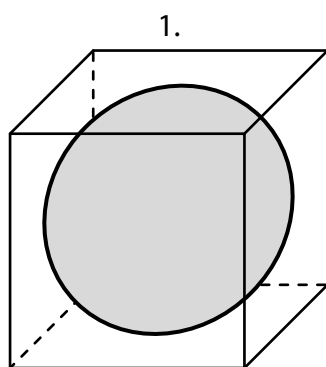
VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 13

Jsou dány 3 shodné krychle o hraně délky a .

Do 1. krychle vepíšeme kouli.

Do 2. krychle vepíšeme 4 shodné rotační válce tak, že všechny mají podstavy v protějších stěnách krychle a každý se pláštěm dotýká dvou stěn krychle a všech zbývajících válců.

Do 3. krychle vepíšeme těleso složené z rotačního kužele a polokoule. Kužel a polokoule mají společnou podstavu, jejíž poloměr je shodný s výškou kužele. Vrchol kužele leží ve středu jedné stěny krychle. (Složené těleso se dotýká každé stěny krychle.)



(CZVV)

max. 3 body

13 Přiradte ke každé otázce (13.1–13.3) správnou odpověď (A–F).

13.1 Jaký je objem koule v 1. krychli? _____

13.2 Jaký je celkový objem 4 válců v 2. krychli? _____

13.3 Jaký je objem složeného tělesa ve 3. krychli? _____

A) $\frac{\pi}{2}a^3$

B) $\frac{\pi}{3}a^3$

C) $\frac{\pi}{4}a^3$

D) $\frac{\pi}{6}a^3$

E) $\frac{\pi}{8}a^3$

F) jiný objem

2 body

- 14 Těleso vznikne rotací pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku kolem přepony délky 6 cm.

Jaký je povrch tohoto tělesa?

- A) $36\pi \cdot (1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$
- B) $18\pi \cdot (1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2$
- C) $18\pi \cdot \sqrt{2} \text{ cm}^2$
- D) $18\pi \text{ cm}^2$
- E) jiný povrch

2 body

- 15 Je dán výraz s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ a reálným číslem m :

$$\frac{(x + m + 6)(x + m)}{(x + 2m)(x - m)}$$

Pro kolik různých čísel m má výraz právě jeden nulový bod?

- A) pro žádné reálné číslo m
- B) pro právě 1 reálné číslo m
- C) pro právě 2 různá reálná čísla m
- D) pro právě 3 různá reálná čísla m
- E) pro více než 3 různá reálná čísla m

16 Je dána posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $a_n = n^2 - 3n + 13$.

Které tvrzení je pravdivé?

- A) Prvních 13 členů dané posloupnosti jsou prvočísla.
- B) Alespoň jeden člen dané posloupnosti je sudé číslo.
- C) Daná posloupnost je rostoucí.
- D) Pro danou posloupnost platí $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
- E) V dané posloupnosti pro každé $n \in \mathbf{N}$ platí $a_{n+1} = a_n + 2n$.

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 17

V kartézské soustavě souřadnic $Oxyz$ je dána přímka p :

$$\begin{aligned} p: x &= 9 + 2t, \\ y &= -t, \\ z &= -2t, \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Ze všech bodů přímky p má bod M nejmenší vzdálenost od počátku O soustavy souřadnic. Bodem M vedeme rovinu q , která je kolmá k přímce p a lze ji určit obecnou rovnicí ve tvaru:
 $q: 2x + by + cz + d = 0; \quad b, c, d \in \mathbf{R}$

(CZVV)

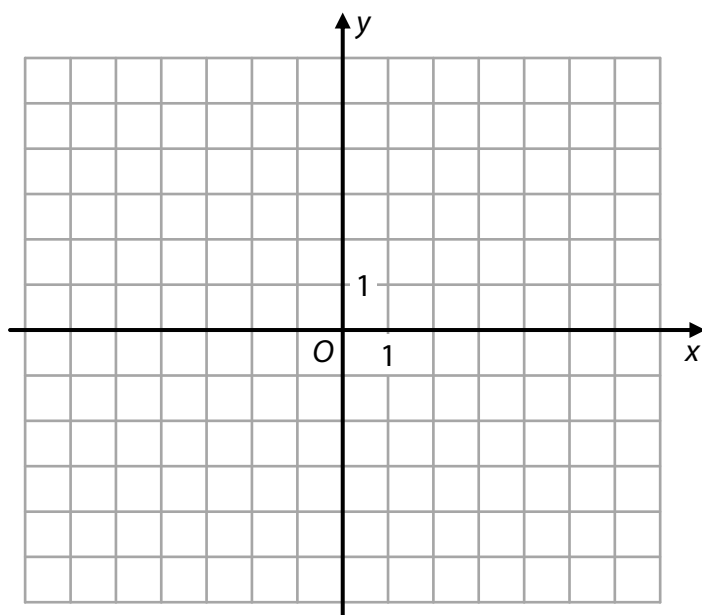
2 body

17 **Jaká je hodnota koeficientu d ?**

- A) $d = -18$
- B) $d = 0$
- C) $d = 5$
- D) $d = 9$
- E) $d = 18$

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 18

V kartézské soustavě souřadnic Oxy je dán bod $C[-1; 1]$ a přímka $p: x + y + 4 = 0$. Na přímce p leží dva různé body A, B , které mají od bodu C vzdálenost 6 jednotek.



(CZVV)

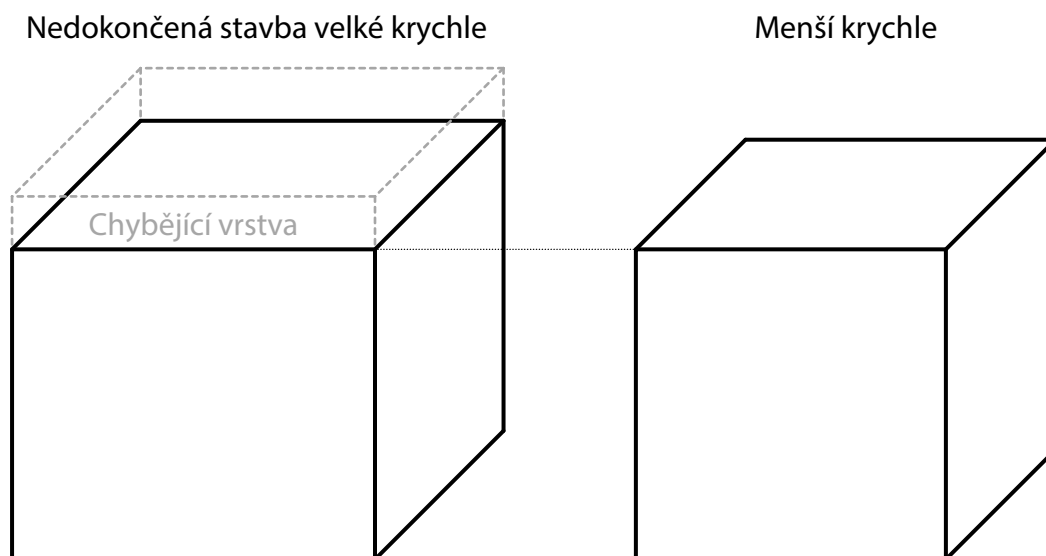
2 body

18 Jaké jsou souřadnice středu úsečky AB ?

- A) $[-3; -1]$
- B) $[-2; 2]$
- C) $[1; 3]$
- D) $[2; -2]$
- E) jiné souřadnice

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 19

Filip stavěl ze shodných krychliček postupně odspodu po vrstvách velkou krychli, ale když mu chyběla k dokončení už jen poslední vrstva, krychličky mu došly. Proto z této nedokončené stavby 300 krychliček odebral, a vznikla tak menší krychle, která byla o jednu vrstvu krychliček nižší, než měla být velká krychle.



(CZVV)

2 body

19 Kolik krychliček měl Filip k dispozici?

- A) méně než 1300
- B) 1300
- C) 1631
- D) 1984
- E) více než 1984

VÝCHOZÍ TEXT K ÚLOZE 20

Jedna desetina všech osob si koupila po třech losích, jedna pětina osob po dvou losích a zbytek po jednom losu. Ze všech losů zakoupených těmito osobami vyhraje jediný.

(CZVV)

2 body

20 Jaká je pravděpodobnost, že vítězný los bude patřit některé osobě, která si koupila alespoň 2 losy?

A) $\frac{11}{14}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{4}{7}$

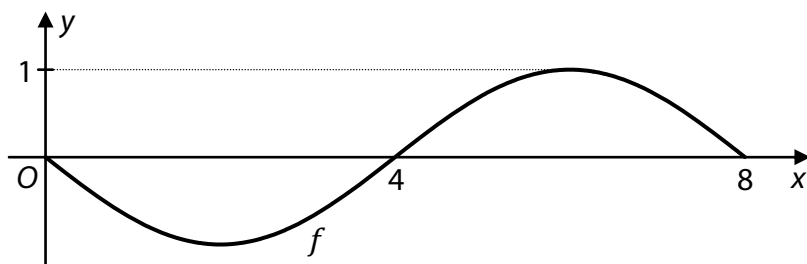
D) $\frac{3}{10}$

E) jiná hodnota pravděpodobnosti

VÝCHOZÍ TEXT A OBRÁZEK K ÚLOZE 21

Funkce f s proměnnou $x \in \mathbf{R}$ má předpis ve tvaru $f: y = \sin ax$, kde $a \in \mathbf{R}$.

Funkce f je určena následujícím grafem zakresleným v kartézské soustavě souřadnic Oxy .



(CZVV)

2 body

21 Jaká je hodnota a ?

- A) $a = \frac{\pi}{4}$
- B) $a = \frac{4}{\pi}$
- C) $a = -\frac{1}{4\pi}$
- D) $a = -\frac{4}{\pi}$
- E) $a = -\frac{\pi}{4}$

max. 3 body

22 Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (22.1–22.3), zda je pravdivé (A) pro všechna $x \in \mathbf{R}$, či nikoli (N).

22.1

$$\log_3 \sqrt{5} = x \Leftrightarrow 9^x = 5$$

A	N
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

22.2

$$\sqrt{9x^2} = 5 \Leftrightarrow 3x = 5$$

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

22.3

$$x^2 \cdot (x^2 + 9) = 5 \cdot (x^2 + 9) \Leftrightarrow x^2 = 5$$

<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
--------------------------	--------------------------

ZKONTROLUJTE, ZDA JSTE DO ZÁZNAMOVÉHO ARCHU UVEDL/A VŠECHNY ODPOVĚDI.