9. Gravitační pole

9.1 Středy dvou železných koulí o hmotnostech $1\,\mathrm{kg}$ a $5\,\mathrm{kg}$ jsou ve vzájemné vzdálenosti $60\,\mathrm{cm}$. Určete velikost gravitační síly, kterou působí první koule na druhou kouli a velikost gravitační síly, kterou působí druhá na první.

9.2 Dva hmotné body umístěné ve vzájemné vzdálenosti r se gravitačně přitahují silou $36\,\mathrm{mN}$. Určete velikost gravitační síly, jestliže

a) vzdálenost mezi nimi bude $2r$, $3r$, $\frac{r}{2}$, $\frac{r}{3}$, $\frac{2}{3}r$, $\frac{3}{2}r$,

b) hmotnost jednoho hmotného bodu bude dvojnásobná,

c) hmotnost jednoho hmotného bodu bude trojnásobná a druhého poloviční.

9.3 Dvě olověné koule se vzájemně dotýkají. Poloměr každé je $30\,\mathrm{cm}$. Olovo má hustotu $11\,340\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$. Určete velikost gravitační síly, kterou se přitahují.

9.4 Planeta Merkur má poloměr $2\,440\,\mathrm{km}$ a hmotnost $3{,}30\cdot10^{23}\,\mathrm{kg}$. Určete velikost gravitačního zrychlení na jeho povrchu a velikost gravitačního zrychlení ve výšce $500\,\mathrm{km}$ nad jeho povrchem.

9.5 Určete hmotnost Země, víme-li, že gravitační zrychlení na zemském povrchu je $9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Zemi považujme za kouli o poloměru $6\,370\,\mathrm{km}$. Určete velikost tíhového zrychlení ve výšce zemského poloměru nad zemským povrchem.

9.6 Určete hmotnost planety Mars, jestliže její měsíc Deimos obíhá přibližně po kružnici o poloměru $23\,460\,\mathrm{km}$ a doba jeho oběhu je $1{,}262\,\mathrm{d}$

9.7 Měsíc má poloměr $1\,740\,\mathrm{km}$ a hmotnost $7{,}35\cdot10^{22}\,\mathrm{kg}$. Určete kruhovou rychlost pro družici pohybující se při jeho povrchu, únikovou rychlost při povrchu a nejkratší možnou dobu oběhu družice.

9.8 Určete výšku družice nad zemským povrchem s dobou oběhu $100\,\mathrm{min}$. Zemi považujme za kouli o poloměru $6\,370\,\mathrm{km}$.

9.9 Planeta Venuše obíhá kolem Slunce ve vzdálenosti $0{,}723\,\mathrm{au}$. Určete její minimální a maximální vzdálenost od Země a její dobu oběhu kolem Slunce.

9.10 Halleyova kometa se pohybuje kolem Slunce po protáhlé elipse s dobou oběhu $76{,}1\,\mathrm{r}$. Její perihélium je ve vzdálenosti $0{,}61\,\mathrm{au}$. Určete vzdálenost jejího afélia od Slunce.

9.11 Jakou maximální rychlostí může volejbalista odehrát míč svisle vzhůru, aniž by se míč dotkl stropu ve výšce $9{,}0\,\mathrm{m}$ nad volejbalistovým místem úderu? Za jakou dobu se míč vrátí zpět?

9.12 Míček byl hozený ve vodorovném směru s rozhledny ve výšce $18\,\mathrm{m}$ nad zemí rychlostí o velikosti $12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Určete vzdálenost místa dopadu od paty rozhledny a velikost rychlosti dopadu.

9.13 Chlapec hodil svému sourozenci z balkónu vodorovným směrem klíče, které zachytil ve vzdálenosti $18\,\mathrm{m}$ od místa pod balkónem. Výškový rozdíl mezi místem hodu a místem záchytu klíčů byl $13\,\mathrm{m}$. Určete dobu letu, velikost počáteční a dopadové rychlosti a úhlovou odchylku rychlosti dopadu od vodorovného směru.

9.14 Při výstřelu vylétla ze vzduchovky diabolka rychlostí $170\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ ve vodorovném směru na střed terče, který je umístěn ve vzdálenosti $10\,\mathrm{m}$ od konce hlavně vzduchovky. Určete délkovou odchylku místa zásahu v terči od jeho středu vlivem gravitace. Odpor vzduchu zanedbejte

9.1 $F_{g1} = F_{g2} = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2} = 9{,}2\cdot 10^{-10}\ \mathrm{N}$

9.2 a) $9\ \mathrm{mN}$, $4\ \mathrm{mN}$, $144\ \mathrm{mN}$, $324\ \mathrm{mN}$, $81\ \mathrm{mN}$, $16\ \mathrm{mN}$
b) $72\ \mathrm{mN}$
c) $54\ \mathrm{mN}$

9.3 $F_g = G\dfrac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{(2r)^2} = \dfrac{4\pi^2}{9}G\rho^2 r^4 = 0{,}30\ \mathrm{mN}$

9.4 $a_{g0} = \dfrac{GM}{R^2} = 3{,}7\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, $a_g = \dfrac{GM}{(R+h)^2} = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

9.5 $M = \dfrac{a_{g0}R^2}{G} = 6{,}0\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, $a_g = \dfrac{a_{g_0}}{4} = 2{,}45\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$

9.6 $mr\omega^2 = G\dfrac{Mm}{r^2}, \omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow M = \dfrac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = 6{,}4\cdot 10^{23}\ \mathrm{kg}$

9.7 $v_k = \sqrt{\dfrac{GM}{R}} = 1\,700\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_u = \sqrt{2}v_k = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}} = 2\,400\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$mR\omega^2 = G\dfrac{Mm}{R^2}, \omega = \dfrac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM}} = 1\ \mathrm{h}\ 49\ \mathrm{min}$ (nebo $T = \dfrac{2\pi R}{v_k}$)

9.8 $mr\omega^2 = G\dfrac{Mm}{r^2}, \omega = \dfrac{2\pi}{T}, r = R+h \Rightarrow h = r - R = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} - R = 760\ \mathrm{km}$

9.9 $r_{\mathrm{min}} = r_{\mathrm{Z}} - r_{\mathrm{V}} = 0{,}277\ \mathrm{au}$, $r_{\mathrm{max}} = r_{\mathrm{Z}} + r_{\mathrm{V}} = 1{,}723\ \mathrm{au}$

$\dfrac{T_{\mathrm{V}}^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} = \dfrac{r_{\mathrm{V}}^3}{r_{\mathrm{Z}}^3} \Rightarrow T_{\mathrm{V}} = T_{\mathrm{Z}}\sqrt{\dfrac{r_{\mathrm{V}}^3}{r_{\mathrm{Z}}^3}} = 0{,}615\ \mathrm{r}$

9.10 $\dfrac{T^2}{T_{\mathrm{Z}}^2} = \dfrac{a^2}{r_{\mathrm{Z}}^3} \Rightarrow a = r_{\mathrm{Z}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{T^2}{T_{\mathrm{Z}}^2}} = 17{,}96\ \mathrm{au}$, $2a = r_{\mathrm{p}} + r_{\mathrm{a}} \Rightarrow r_{\mathrm{a}} = 2a - r_{\mathrm{p}} = 35{,}3\ \mathrm{au}$

9.11 $h = \dfrac{1}{2}gt^2, v = gt \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 13\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}, t' = 2t = 2\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = \sqrt{\dfrac{8h}{g}} = 2{,}7\ \mathrm{s}$

nebo ze ZZME $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = 13\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

9.12 $h = \dfrac{1}{2}gt^2, d = v_0 t \Rightarrow d = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 23\ \mathrm{m}$

$mgh + \dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}mv_d^2 \Rightarrow v_d = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 22\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

9.13 $h = \dfrac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 1{,}6\ \mathrm{s}$, $v_0 = \dfrac{d}{t} = d\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 11\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$v_{\mathrm{d}} = \sqrt{v_{\mathrm{dx}}^2 + v_{\mathrm{dy}}^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2} = \sqrt{\dfrac{gd^2}{2h} + 2gh} = 19\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{v_{\mathrm{dy}}}{v_{\mathrm{dx}}} = \dfrac{gt}{v_0} = \dfrac{\sqrt{2gh}}{d\sqrt{\dfrac{g}{2h}}} = \dfrac{2h}{d} \Rightarrow \alpha = 55°$

9.14 $\Delta y = \dfrac{1}{2}gt^2, d = v_0 t \Rightarrow \Delta y = \dfrac{gd^2}{2v_0^2} = 17\ \mathrm{mm}$